План – конспект мастер-класса

Тема: **Метод рационализации**

(на примере логарифмических неравенств №15 ЕГЭ)

Педагог - мастер: учитель математики МКОУ «Розгребельская СОШ».

Дата проведения: 25 октября 2016 года.

Место проведения: МКОУ «Большесолдатская СОШ».

Цель мастер- класса: продемонстрировать бесспорное преимущество метода рационализации при решении логарифмического неравенства с переменной в основании над традиционными методами.

Задачи:

- изложить теоретическую основу метода;
- показать применение метода на примере решения логарифмических неравенств №15 ЕГЭ.

Оборудование : презентация, проектор, ноутбук.

Раздаточный материал: таблица равносильных преобразований.

При подготовке к ЕГЭ в №15 достаточно часто встречаются логарифмические неравенства, содержащие переменную в основании логарифма. Я предлагаю вам обсудить методы решения такого вида неравенств. Решите, пожалуйста, в группах следующее неравенство:

$$\log_{\frac{2}{3}|x-2|} 2^{1-x^2} \geq 0$$

Поднимите, пожалуйста, руки те, кто решал таким способом?

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \dfrac{2}{3}|x-2| < 1, \\ 2^{1-x^2} \leq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{2}{3}|x-2| > 1, \\ 2^{1-x^2} \geq 1, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0{,}5 < x < 3{,}5;\ x \neq 2, \\ (x-1)(x+1) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 3{,}5 \\ x < 0{,}5 \end{array}\right. \\ (x-1)(x+1) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{[1;2) \cup (2;3{,}5), \\ \{\ [-1;0{,}5). \end{array}\right.$$

$$\textit{Ответ}: [-1;0{,}5) \cup [1;2) \cup (2;3{,}5).$$

Как мы видим решение достаточно трудоемкое, и занимает много времени, кроме того, оно содержит неравенства с модулем, не очень любимые нашими учениками.

Метод рационализации, который можно применить при решении данного неравенства, на мой взгляд, устраняет эти недостатки стандартного решения.

Метод рационализации или декомпозиции (обобщенный метод интервалов) заключается **в замене сложного выражения F(x) на более простое G(x), при котором неравенство G(x)*0 равносильно неравенству F(x) * 0 на ОДЗ выражения F(x).**

Наиболее часто встречающиеся замены приведены в этой таблице:

№	Исходное выражение ($F(x)$)	Выражение после замены ($G(x)$)
1	$\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x)$ ($h(x) \neq 1$)	$(h(x)-1)(f(x)-g(x))$
2	$\log_{h(x)} f(x) - 1$ ($h(x) \neq 1$)	$(h(x)-1)(f(x)-h(x))$
3	$\log_{h(x)} f(x)$ ($h(x) \neq 1$)	$(h(x)-1)(f(x)-1)$
4	$\log_{f(x)} h(x) - \log_{g(x)} h(x)$ ($f(x) \neq 1, g(x) \neq 1$)	$(f(x)-1)(g(x)-1)\times$ $\times(h(x)-1)(g(x)-f(x))$
5	$h(x)^{p(x)} - h(x)^{q(x)}$	$(h(x)-1)(p(x)-q(x))$
6	$h(x)^{p(x)} - 1$	$(h(x)-1)p(x)$
7	$f(x)^{p(x)} - g(x)^{p(x)}$	$(f(x)-g(x))p(x)$
8	$\lvert p(x)\rvert - \lvert q(x)\rvert$	$(p(x)-q(x))\times$ $\times(p(x)+q(x))$
9	$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$, здесь $f(x) \geqslant 0$ и $g(x) \geqslant 0$	$f(x)-g(x)$
10	$\lvert p(x)\rvert - \sqrt{g(x)}$, здесь $g(x) \geqslant 0$	$p^2(x)-g(x)$

Их доказательство приведено во многих математических пособиях, в том числе и у Ф.Ф.Лысенко – Решаем задания C_3 методом рационализации. Решение неравенств методом рационализации, опирается на следующий алгоритм.

Алгоритм применения метода рационализации.

1.Выписать условия, задающие ОДЗ исходного неравенства и найти ОДЗ.

2.Привести исходное неравенство к виду F(x) * 0 .Все возможные слагаемые в левой части привести к общему знаменателю.

3.По возможности заменить все выражения на более простые.

4. Решить получившееся неравенство.

5. Записать ответ неравенства, учитывая ОДЗ исходного неравенства.

Решим наше неравенство методом рационализации.

$$\log_{\frac{2}{3}|x-2|} 2^{1-x^2} \geq 0$$

ОДЗ $\begin{cases} \frac{2}{3}|x-2| \neq 1, \\ \frac{2}{3}|x-2| > 0, \end{cases} \begin{cases} |x-2| \neq \frac{3}{2}, \\ |x-2| \neq 0, \end{cases} \begin{cases} x \neq 3{,}5, \\ x \neq 0{,}5, \\ x \neq 2. \end{cases}$

$$\left(\frac{2}{3}|x-2-1|\right)\left(2^{1-x^2}-1\right) \geq 0,$$

Используя замены №1 ,8 и 6, получим неравенство:

$$(x-2-1{,}5)(x-2+1{,}5)(2-1)(1-x^2) \geq 0,$$

$$(x-3{,}5)(x+0{,}5)(x-1)(x+1) \leq 0,$$

с учетом ОДЗ ответ исходного неравенства $x \in [-1;0{,}5) \cup [1;2) \cup (2;3{,}5)$.

Вы согласны с тем, что данное решение проще для школьников?

Я сделала небольшую выборку неравенств, которые можно решать методом рационализации, из заданий ЕГЭ за прошлые годы и из пособий по подготовке к ЕГЭ. (И.В. Ященко).

Пример 1.

Решение: ОДЗ : $\begin{cases} x > 2{,}5, \\ x \neq 3. \end{cases}$

$$(5x-13)(2x-5-1)(x^2-6x+10-1) \geq 0,$$

$$(5x-13)(x-3)^3 \geq 0,$$

$$(x-2{,}6)(x-3) \geq 0.$$

Ответ: $x \in (2{,}5;2{,}6] \cup (3;+\infty)$.

Давайте, не решая полностью следующие неравенства, составим условия ОДЗ и осуществим замену исходного неравенства на более простое.

Пример 2.

$$\left|\log_3(2-x)\right| \geq \left|\log_9 \frac{2-x}{4}\right|$$

Решение: ОДЗ: x<2,

преобразуем неравенство: $\left|\log_3(2-x)\right| - \left|\log_9\left(\frac{2-x}{4}\right)\right| \geq 0$,

используя 8 строчку таблицы, получим:

$$\left(\log_3(2-x) - \log_3\left(\frac{\sqrt{2-x}}{2}\right)\right)\left(\log_3(2-x) - \log_3\left(\frac{2}{\sqrt{2-x}}\right)\right) \geq 0,$$

воспользуемся 1 заменой $(3-1)\left(2-x-\frac{\sqrt{2-x}}{2}\right)(3-1)\left(2-x-\frac{2}{\sqrt{2-x}}\right) \geq 0$,

дальнейшие преобразования приведут к неравенству:

$$\sqrt{2-x}\left(\sqrt{2-x}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(2-x)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{2}{3}\frac{3}{2}}}{\sqrt{2-x}}\right) \geq 0,$$

используя 9 и 7 строку, получим: $\left((2-x)-\frac{1}{4}\right)\left((2-x)-\sqrt[3]{4}\right) \geq 0$, далее заканчиваем решение неравенства методом интервалов.

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x \sqrt{3-x}\right) \geq 0 .$$

Пример 3

ОДЗ: $\begin{cases} \log_x \sqrt{3-x > 0}, \\ \frac{x}{3} > 0, \frac{x}{3} \neq 1, \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)\left(\sqrt{3-x}-1\right) > 0, \\ x > 0, x \neq 1, \\ \sqrt{3-x} > 0, \\ x \neq 3, \end{cases}$ $\begin{cases} (x-1)(3-x-1) > 0 \\ x > 0, x \neq 1? \\ x < 3. \end{cases}$

В данном неравенстве при нахождении условий ОДЗ, тоже использовали 1 и 9 замены.

$$\log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\ge 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{x}{3}}\left(\log_x\sqrt{3-x}\right)\ge \log_{\frac{x}{3}}1$$

$$\left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\log_x\sqrt{3-x}-1\right)\ge 0 \qquad \left|\left(\frac{x}{3}-1\right)\left(\log_x\sqrt{3-x}-\log_x x\right)\ge 0\right.$$

$$(x-3)(x-1)\left(3-x-x^2\right)\ge 0,$$

Понятно, что решение снова сводится к методу интервалов.

Пример 4

Составьте условия ОДЗ и упрощенное неравенство, используя метод рационализации.

$$2\log_{\left(x^2-6x+10\right)^2}\left(5x^2+3\right)\le \log_{x^2-6x+10}\left(4x^2+7x+3\right)$$

Ответ:

$$ОДЗ\begin{cases} x\ne 3, \\ \left[\begin{array}{l} x>-\dfrac{3}{4}, \\ x<-1. \end{array}\right. \end{cases}$$

$$x(x-3)^2(x-7)\le 0$$

Пример 5.Это еще один пример неравенства, взятого из заданий ЕГЭ прошлых лет, в котором рационально использовать метод декомпозиции.

$$\log_{1-\frac{1}{(x-1)^2}}\left(\frac{x^2+5x+8}{x^2-3x+2}\right)\le 0$$

Пример 6. $$\log_x(x-2)\cdot\log_x(x+2)\le 0$$

В данном задании применяется следствие из теорем о равносильной замене.

Следствие: $\log_{h(x)} f(x) . \log_{p(x)} g(x) * 0 \quad (f(x)-1)(g(x)-1)(h(x)-1)(p(x)-1) * 0$

$$ОДЗ: x>2$$

$$(x-1)^2(x-3)(x+1)\le 0$$

Конечно, мы рассмотрели только небольшую часть заданий, которые можно решать методом рационализации. Как вы считаете, необходимо ли обучать данному методу наших учеников?